TD 1 : Révisions d'algèbre linéaire (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Appliquer les définitions du cours
2. Raisonner par double implication en appliquant les définitions.
3. (a) Tout vecteur $y \in \mathrm{Im}(f)$ admet un antécédent x dans E, cet antécédent peut ensuite être décomposé dans la base $(e_1, ..., e_n)$...
   (b) Utiliser la caractérisation f injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
   (c) Utiliser les deux résultats précédents.
4. Partir d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$, compléter avec une famille de vecteurs. Montrer que la restriction de f à l'espace vectoriel engendré par ces autres vecteurs est un isomorphisme vers $\mathrm{Im}(f)$.

Indications pour l'exercice 2 :
Bien appliquer les définitions.

Indications pour l'exercice 3 :
Bien appliquer les définitions. Penser à la condition nécessaire (mais non suffisante) : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.

Pour trouver la base : revoir les méthodes dans le cours d'hypokhâgne si nécessaire.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Appliquer la définition
2. Considérer l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$.
3. Noter que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ et que $\dim(\mathbb{R}) = 1$, comme $\phi \neq 0$ (regarder $\phi(X)$ par exemple), alors $\mathrm{rg}(\phi) > 0$ donc $\mathrm{rg}(phi) = 1$.

Indications pour l'exercice 5 :
$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ donc une famille de 3 vecteurs est une base si et seulement si elle est libre.

Indications pour l'exercice 6 :

1. Raisonner par l'absurde
2. Multiplier à gauche par N dans l'égalité $\lambda_0 I + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{n-1} N^{p-1} = 0$. Recommencer autant de fois que nécessaire.

Indications pour l'exercice 7 :
Trouver des matrices équivalentes par des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir une matrice sous forme échelonnée.

Indications pour l'exercice 8 :
Mettre sous forme échelonnée et trouver une expression dépendant de x dont le rang dépend.

Indications pour l'exercice 9 :

1. Appliquer la définition
2. Là aussi
3. Remarquer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ puis utiliser le théorème du rang.

Indications pour l'exercice 10 :

1. M est de rang 1 donc $\mathrm{Im}(M)$ est de dimension 1 donc c'est une droite vectorielle. De plus les colonnes de M sont dans $\mathrm{Im}(M)$...
2. Il suffit de poser $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.
3. Remplacer M par AB^T dans le calcul et remarquer que $B^T A = \mathrm{tr}(M)$.

Indications pour l'exercice 11 :
Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que x_0, $f(x_0)$ et $f^2(x_0)$ sont non nuls, puis montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

Indications pour l'exercice 12 :
Appliquer la formule du binôme de Newton en prenant soin de vérifier que les matrices commutent, puis remarquer que N est nilpotente.

Indications pour l'exercice 13 :
L'hypothèse revient à dire que pour tout x dans E il existe un réel λ_x tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$. Il faut montrer que ce λ_x ne dépend en fait pas de x... Exprimer de deux façons différentes $f(x + y)$ où x et y sont deux vecteurs non colinéaires.

Indications pour l'exercice 14 :

1. Simple définition à vérifier.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ et que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Il faut au passage montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = 0$ alors $A = 0$ (on peut considérer les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ou bien plus astucieusement poser $X = A^T$ et regarder ce que ça donne...).

Indications pour l'exercice 15 :

1. Simple définition à vérifier.
2. Si $Q(X) = P(1 - X)$, qu'est ce que $Q(1 - X)$?
3. Remarquer que u est une symétrie, donc diagonalisable avec comme valeurs propres -1 et 1.

Indications pour l'exercice 16 :

1. (a) En posant $A = B = O$ on trouve que $\varphi(O) = 0$ ou $\varphi(O) = 1$, l'hypothèse φ non constante permet d'éliminer l'une de ces hypothèses en reprenant A quelconque et $B = O$.
   (b) Là aussi on peut trouver $\varphi(I) = 0$ ou $\varphi(I) = 1$, et l'hypothèse φ non constante permet d'éliminer l'une de ces hypothèses.
2. Partir de $\varphi(I) = \varphi(AA^{-1})$.
3. (a) On rappelle que si A et B sont deux même rang, il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $A = Q^{-1}BP$.
   (b) Remarquer que $\varphi(A^m) = \varphi(A)^m$.
   (c) Exhiber une matrice nilpotente de même rang que A. Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure qui n'a que des zéros sur la diagonale est nilpotente.